Étude relative à la fonction ζ et aux nombres premiers par les probabilités

Garet-Kurtzmann, p. 56

Proposition : Pour $s>1$, on pose $\zeta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$.
Alors $\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)$ où $(p_k)_{k\geq 1}$ est la suite des nombres premiers.

Soit $s>1$. On note μ_s la mesure sur $(\mathbb{N}^*,\mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ tq :
$$\forall i\in\mathbb{N}^*,\ \mu_s(\{i\})=\frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{i^s}$$
Alors : $\mu_s(\mathbb{N}^*)=\mu_s\left(\bigsqcup_{i=1}^{+\infty}\{i\}\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{i^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(s)}=1$.
Donc μ_s est une mesure de probabilité.
Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Alors : $\mu_s(p\mathbb{N}^*)=\sum_{i=1}^{+\infty}\mu_s(\{pi\})=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{p^s i^s}=\frac{1}{p^s}$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On pose $A_k=p_k\mathbb{N}^*$. Les événements $(A_k)_{k\geq1}$ sont indépendants sous μ_s.
En effet, soit $J\subset\mathbb{N}^*$ fini. Alors $\bigcap_{j\in J}A_j=\left(\prod_{j\in J}p_j\right)\mathbb{N}^*$ car les $(p_j)_{j\in J}$ sont premiers.
D'où $\mu_s\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)=\frac{1}{\left(\prod_{j\in J}p_j\right)^s}=\frac{1}{\prod_{j\in J}p_j^s}=\prod_{j\in J}\frac{1}{p_j^s}=\prod_{j\in J}\mu_s(A_j)$.

Or, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}A_k^c=\{1\}$ car 1 est le seul entier naturel multiple d'aucun nombre premier.
La suite $\left(B_n=\bigcap_{k=1}^{n}A_k^c\right)_{n\geq1}$ est décroissante et $\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=1}^{n}A_k^c=\bigcap_{k=1}^{+\infty}A_k^c$ donc par continuité

pas multiple de $p_1,\dots,p_{k+1}$
$\Rightarrow$ pas multiple de $p_1,\dots,p_k$

par le haut, $\frac{1}{\zeta(s)}=\mu_s(\{1\})=\mu_s\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}A_k^c\right)=\lim_{n\to+\infty}\mu_s\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k^c\right)=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\mu_s(A_k^c)$
$$=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)$$

par indépendance des $(A_k)_{k\geq1}$

Corollaire : Soit $(p_k)_{k\geq1}$ la suite nombres premiers.
Alors les séries $\sum_{k\geq1}\frac{1}{p_k}$ et $\sum_{k\geq1}-\log\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ sont divergentes.

Par continuité du log, pour $s>1$, $\log\zeta(s)=\sum_{k\geq1}-\log\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)$.
Or, $\lim_{s\to1^+}\zeta(s)=+\infty$. En effet, soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors $\zeta(s)\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}$.
D'où $\lim_{s\to1^+}\zeta(s)\geq\lim_{s\to1^+}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

$p_k^s\geq p_k\Rightarrow 1-\frac{1}{p_k^s}\geq1-\frac{1}{p_k}$
$\Rightarrow -\log\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)\leq-\log\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$

Soit $A>0$. Il existe alors $s>1$ tq $\zeta(s)>e^A$. D'où $\sum_{k=1}^{+\infty}-\log\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\geq\sum_{k=1}^{+\infty}-\log\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)=\log(\zeta(s))>A$.
Ainsi, $\sum_{k\geq1}-\log\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ est divergente.

Or, $-\log\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{p_k}$, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{k\geq1}\frac{1}{p_k}$ est divergente.